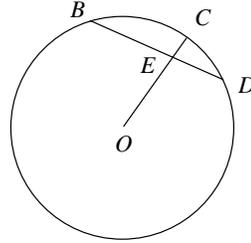


Olympiade mathématique du Canada 1971

PROBLÈME 1

DEB est une corde d'un cercle tel que $DE = 3$ et $EB = 5$. Soit O le centre du cercle. Joignons maintenant OE et poursuivons OE de façon à couper le cercle au point C . (Voir le diagramme). Etant donné que $EC = 1$, trouver le rayon du cercle.



PROBLÈME 2

Soit x et y deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

PROBLÈME 3

$ABCD$ est un quadrilatère dont $AD = BC$. Si $\angle ADC$ est plus grand que $\angle BCD$, montrer alors que $AC > BD$.

PROBLÈME 4

Déterminer tout nombre réel a tel que les deux polynômes $x^2 + ax + 1$ et $x^2 + x + a$ aient au moins une racine en commun.

PROBLÈME 5

Soit

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

où les coefficients a_i sont entiers. Si $p(0)$ et $p(1)$ sont tous deux impairs, montrer que $p(x)$ n'a aucune racine entière.

PROBLÈME 6

Montrer que, pour tout entier n , $n^2 + 2n + 12$ n'est pas un multiple de 121.

PROBLÈME 7

Soit n un nombre à cinq chiffres (dont le premier chiffre est non nul) et soit m le nombre à quatre chiffres formé à partir de n en retirant le chiffre du milieu. Déterminer tout n tel que n/m soit entier.

PROBLÈME 8

Un pentagone régulier est inscrit dans un cercle de rayon r . P étant un point quelconque à l'intérieur du pentagone, des perpendiculaires sont tracées de P aux côtés du pentagone, ou peut-être sur les extensions de ces côtés.

- a) Montrer que la somme des longueurs de ces perpendiculaires est constante.
- b) Exprimer cette constante en terme du rayon r .

PROBLÈME 9

Deux mâts de drapeau de hauteur h et k sont situés $2a$ unités à part sur une surface plane. Trouver l'ensemble des points sur la surface qui sont tels que les angles d'élévation sur le sommet des mâts soient égaux.

PROBLÈME 10

Supposons que n individus aient la connaissance d'exactly un renseignement, et que les n renseignements soient différents. Chaque fois que l'individu A contacte l'individu B, A dévoile à B toute sa connaissance, mais par contre B ne révèle rien à A. Quel est le nombre minimum de contacts requis entre les couples d'individus de telle sorte que chacun soit en possession de tous les renseignements? Montrer que votre réponse est en effet un minimum.