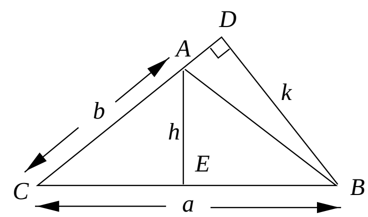
Olympiade mathématique du Canada
1970

Problème 1

Trouver tous les triplets (x, y, z) tels que la somme de n'importe lequel de ces nombres avec le produit des deux autres soit égal à 2.

Problème 2

Etant donné un triangle ABC dont l'angle A est obtus et dont les hauteurs soient de longueurs h et k comme le montre le diagramme ci-contre, montrer que $a + h \geq b + k$. Trouver les conditions qui nous donneraient $a + h = b + k$.



Problème 3

Une collection de balles nous est donnée. Chaque balle est de couleur rouge ou bleue et au moins une de chaque couleur apparait. De plus, chaque balle pèse 1 ou 2 livres, et on a de même au moins une de chaque poids. Montrer qu'il y a 2 balles de couleur et poids différents.

Problème 4

a) Trouver tout entier positif débutant par le chiffre 6 et tel que le nombre obtenu en délaissant ce chiffre 6 soit 1/25 fois l'entier de départ.
b) Montrer qu'il n'y ait aucun entier tel qu'en délaissant son premier chiffre on obtienne un nombre qui soit 1/35 fois l'entier de départ.

Problème 5

Un quadrilatère a un sommet sur chaque côté d'un carré dont chaque côté est de longueur 1. Montrer que les longueurs a, b, c et d des côtés du quadrilatère satisfont les inégalités

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

Problème 6

Etant donnés trois points non colinéaires A, B, C, construire un cercle de centre C tel que les deux tangentes au cercle en A et B soient parallèles.

Problème 7

Montrer qu'étant donnés cinq nombres entiers, pas nécessairement tous distincts, on puisse toujour choisir trois d'entre eux de telle sorte que leur somme soit divisible par 3.

Problème 8

Considérons tous les segments de droite de longueur 4 ayant un point terminal sur la droite $y = x$ et dont l'autre point terminal se situe sur la droite $y = 2x$. Trouver l'équation du lieu géométrique des points milieux de ces segments.

Problème 9

Soit $f(n)$ la somme des n premiers termes de la suite

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots .$$

a) Donner une formule pour $f(n)$.
b) Montrer que $f(s+t) - f(s-t) = st$ où s et t sont des entiers positifs et $s > t$.

Problème 10

Etant donné le polynôme

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

dont les coéfficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont entiers, et étant donné aussi qu'il existe quatre nombres entiers distincts a, b, c et d tels que

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5,$$

montrer alors qu'il n'existe aucun nombre entier k tel que $f(k) = 8$.