# Olympiade mathématique du Canada
# 1969

PROBLÈME 1

Montrer que si $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ et $p_1$, $p_2$, $p_3$ sont tous non nuls, alors

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

pour chaque entier positif $n$.

PROBLÈME 2

Trouver lequel des deux nombres $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$, $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ est le plus grand pour $c \geq 1$ quelconque.

PROBLÈME 3

Soit $c$ la longeur de l'hypoténuse d'un triangle droit dont les deux autres côtés aient pour longueur $a$ et $b$. Montrer que $a + b \leq \sqrt{2}c$. Dans quel cas a-t'on égalité?

PROBLÈME 4

Soit $ABC$ un triangle équilatéral, et $P$ un point arbitraire à l'intérieur du triangle. Des perpendiculaires $PD$, $PE$, $PF$ sont tracées sur les trois côtés du triangle. Montrer que quelque soit $P$,

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

PROBLÈME 5

Soit $ABC$ un triangle dont les côtés aient pour longueurs $a$, $b$ et $c$. Soit $D$ l'intersection de la bissectrice de l'angle $C$ avec le côté $AB$. Montrer que la longueur de $CD$ est précisément

$$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

PROBLÈME 6

Trouver la somme de $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)(n-1)! + n \cdot n!$, où $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$.

PROBLÈME 7

Montrer qu'il n'existe pas de nombres entiers $a$, $b$, $c$ pour lesquels $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

## Problème 8

Soit $f$ une fonction munie des propriétés suivantes:
1) $f(n)$ est définie pour chaque nombre entier positif $n$;
2) $f(n)$ est un nombre entier;
3) $f(2) = 2$;
4) $f(mn) = f(m)f(n)$ pour chaque $m$ et $n$;
5) $f(m) > f(n)$ pour tout $m > n$.

Montrer que $f(n) = n$.

## Problème 9

Montrer que pour tout quadrilatère inscrit dans un cercle de rayon 1, la longueur du plus petit côté est au plus $\sqrt{2}$.

## Problème 10

Soit $ABC$ un triangle isocèle droit dont les côtés égaux ont pour longueur 1. $P$ est un point sur l'hypoténuse, et les bases des perpendiculaires de $P$ sur les autres côtés sont $Q$ et $R$. Considérons maintenant les aires des triangles $APQ$ et $PBR$, et de même que l'aire du rectangle $QCRP$. Montrer que quelque soit $P$, la plus grande de ces aires est au moins $2/9$.