Olympiade mathématique junior du Canada 2020

Solutions officielles

1. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite de nombres réels positifs qui satisfait

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n \quad \text{pour tout nombre naturel } n > 0.$$

Montrer que $a_n \geq \frac{1}{n}$ pour tout nombre naturel $n > 0$.

Solution : On procède par recurrence et on voit que l'inégalité est vraie pour $n = 1$. Supposons que l'inégalité $a_n \geq \frac{1}{n}$ est satisfaite pour un certain nombre entier $n > 0$. Soit f la fonction $f(x) = x^2 + x$ pour laquelle nous avons $f(a_{n+1}) = a_n$. Comme f est une fonction croissante sur l'intervalle $[0, +\infty)$, pour démontrer que $a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$, il suffit de montrer que $f(a_{n+1}) \geq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+2}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2+2n}{n(n+1)^2} \\
&< \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n} \\
&\leq a_n = f(a_{n+1}),
\end{aligned}$$

d'où on conclut que $a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$ et, donc, nous avons completé la preuve par recurrence.

$\square$

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.

CMS SMC

Expertise. Insight. Solutions.

SOCIETY OF ACTUARIES

2. Ziquan fait un dessin dans le plan pour un cours d'art. Il commence par placer son crayon à l'origine et dessine une série de segments de droite, de sorte que le n-ième segment ait la longueur n. Il n'est pas autorisé à lever son crayon, de sorte que la fin du segment n soit le début du segment $(n+1)$. Les segments de droite tracés peuvent se croiser et, même, peuvent chevaucher des segments déjà dessinés.

   Après avoir tracé un nombre fini de segments, Ziquan s'arrête et remet son dessin à son professeur d'art. Il réussit le cours si le dessin qu'il remet est un carré N par N, pour un entier positif N, et il échoue dans le cas contraire. Est-il possible que Ziquan passe le cours ?

   Solution : On va montrer que Ziquan peut passer le cours en dessinant un carré dont la longueur de chaque côté est de $N = 54$. Premièrement, on observe que si Ziquan trace, vers la gauche, un segment de longueur x du point A au point B, alors il peut tracer un segment de longueur $x+1$, à droite du B, jusqu'au point C qui est sur la ligne AB et seulement une unité à la droite du point A.

   Cela a l'effet net de dessiner un segment de droite de longueur 1 avec un reste de longueur x dans la direction opposée. Ainsi, si Ziquan a déjà dessiné le segment AB, l'effet net étend le segment de droite existant d'une unité, 1. Nous appelons cette procédure un "décalage d'unité". Biensûr, le décalage d'unité est possible également sur l'axe verticale.

   Ziquan commence par dessiner les premiers 11 segments de droite sur l'axe x, tous allant vers la droite, à l'exception du segment de longueur 6 qui va vers la gauche. Cela donne un segment du point $A = (0, 0)$ au point $B = (54, 0)$, car $54 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$. Ziquan dessine le deuxième côté du carré en dessinant des segments verticaux montant de $12, 13, 14, 15$, qui finissent au point $C = (54, 54)$. Il va maintenant à gauche avec les segments $16, 17, 18$, ce qui le place au point $(3, 54)$. Trois décalages d'unité à gauche le font arriver au point $D = (0, 54)$, après avoir tiré un seul segment de longueur 24. Il termine le carré en descendant avec des segments d'une longueur de $25, 26$, suivis de trois derniers décalages d'unité vers le bas. Remarquer que chaque changement d'unité effectué a un reste suffisamment petit pour ne pas sortir du carré.

   Deuxième solution : Oui, pour $N = 30$: Commencez dans une direction avec $1 + 2 + 3$, tournez à droite et tracez $4 + 5 + 6 + 7 + 8$, tournez à droite et tracez $9 + 10 + 11$, tournez à droite et tracez $12+13-14+15-16+17-18+19-20+21-22+23$, et, finalement, tournez à droite pour dessiner un dernier segment de 24.

   Autres solutions possibles : Pour $N = 78$ (et nombre des étapes $n = 56$), $N = 120$ (avec un nombre des étapes n qui est soit 119, soit 71), et $N = 190$ (nombre des étapes $n = 149$).

   $\square$

3. Soit S un ensemble composé de $n \geq 3$ nombres réels positifs. Montrer qu'il existe au plus $n-2$ nombres qui sont à la fois des puissances entières de trois et qui s'écrivent comme la somme de trois éléments de S.

Solution.
Pour montrer qu'il existe au plus $n-2$ nombres qui sont des puissances entières de trois, égale à la somme de trois éléments de S, où $|S| = n$, on procède par récurrence sur n, $n \geq 3$.

Pour $n = 3$, il y a une seule somme de trois elements de S qu'on peut former, et qui pourra être une puissance entière de trois, donc la propriété est vraie pour la première valeur de n.

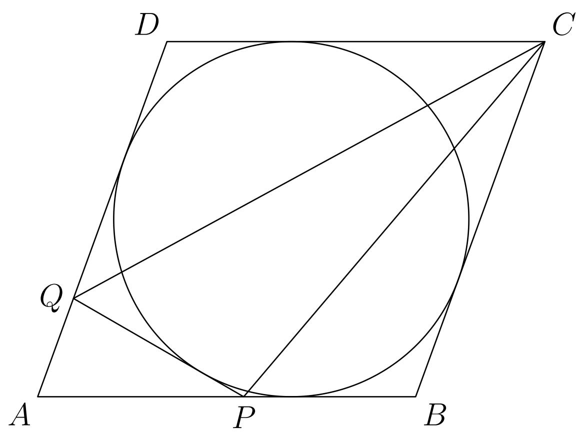
Supposons que la propriété est vraie pour un $n \geq 3$ quelconque, donc, pour tout ensemble S des nombres réels positifs, où $|S| = n$, il existe au plus $n-2$ puissances entiéres de trois, somme des trois éléments distinctes de S. On va montrer que la propriété est vraie pour tout ensemble S' avec $n+1$ éléments comme dans l'énoncé.

Soit S' un ensemble avec $n+1$ éléments, nombres reels positifs, and soit x son élément de valeur maximale. L'ensemble $S \setminus \{x\}$ a n éléments et donc satisfait la propriété. La somme de x avec n'importe quels deux autres éléments de S est strictement entre x et $3x$, donc x peut former une seule puissance entière de trois. Alors, au total, S' peut avoir au plus $(n-2)+1$ puissances entières de trois, ce qui conclut la récurrence.

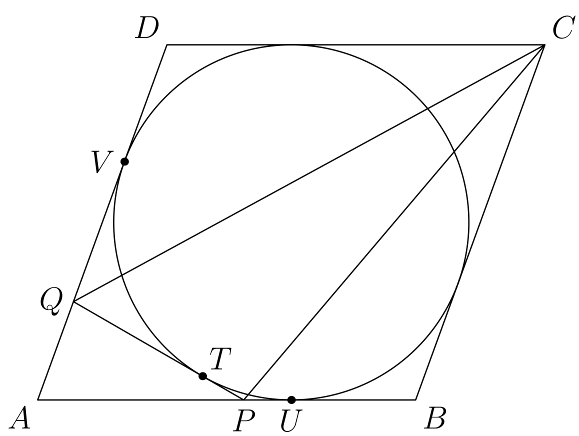
L'énoncé ne le demande pas, mais nous allons montrer également que la borne $n-2$ est atteinte. Observer que l'ensemble $S = \{1, 2, 3^2 - 3, 3^3 - 3, \ldots, 3^n - 3\}$ est tel que $3^2, 3^3, \ldots, 3^n$ sont des sommes des trois éléments distincts de S telle que chaque nombre de forme $3^k - 3$ est utilisé exactement une fois pour former la somme égale à 3^k.

$\square$

4. Un cercle est inscrit dans un losange $ABCD$. Les points P et Q varient sur les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$, respectivement, de sorte que le segment $\overline{PQ}$ est tangent au cercle. Montrer que pour tout segment $\overline{PQ}$, l'aire du triangle CPQ est constante.



Solution. Soient T, U, et V les points de tangence au cercle sur $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, respectivement. Soit $p = PT = PU$ et $q = QT = QV$, ainsi que $a = AU = AV$ et $b = BU = DV$. Alors, le côté du losange est de longueur $a + b$.



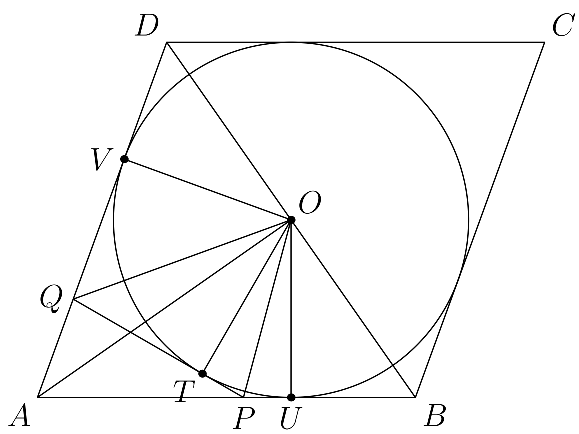
Soit $\theta = \angle BAD$, donc $\angle ABC = \angle ADC = 180^\circ - \theta$. Alors (si on note par [XYZ] l'aire du triangle avec sommets X, Y, Z), nous avons

$$[APQ] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AQ \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}(a-p)(a-q)\sin\theta,$$
$$[BCP] = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}(b+p)(a+b)\sin\theta,$$
$$[CDQ] = \frac{1}{2} \cdot DQ \cdot CD \cdot \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}(b+q)(a+b)\sin\theta,$$

et, donc,

$$\begin{aligned}[CPQ] &= [ABCD] - [APQ] - [BCP] - [CDQ] \\ &= (a+b)^2 \sin\theta - \frac{1}{2}(a-p)(a-q)\sin\theta - \frac{1}{2}(b+p)(a+b)\sin\theta - \frac{1}{2}(b+q)(a+b)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab - bp - bq - pq)\sin\theta.\end{aligned}$$

Soit O le centre du cercle, et soit r le rayon du cercle. Si $x = \angle TOP = \angle UOP$ et $y = \angle TOQ = \angle VOQ$, alors $\tan x = \frac{p}{r}$ et $\tan y = \frac{q}{r}$.



On voit que $\angle UOV = 2x + 2y$, et $\angle AOU = x + y$. Alors, $\angle AOB = 90°$, et $\angle OBU = x + y$. En conséquence,

$$\tan(x+y) = \frac{a}{r} = \frac{r}{b},$$

et $r^2 = ab$. D'autre part,

$$\frac{r}{b} = \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{p}{r} + \frac{q}{r}}{1 - \frac{p}{r}\cdot\frac{q}{r}} = \frac{r(p+q)}{r^2 - pq} = \frac{r(p+q)}{ab - pq}.$$

Donc, $ab - pq = bp + bq$, et $bp + bq + pq = ab$. Finalement, on déduit que l'aire

$$[CPQ] = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab - bp - bq - pq)\sin\theta = \frac{1}{2}(a^2 + ab)\sin\theta,$$

est constante.

Deuxième solution : Soit O le centre du cercle et soit r son rayon. Alors $[CPQ] = [CDQPB] - [CDQ] - [CBP]$, où [...] note l'aire du polygône avec les sommets indiqués entre les paranthèses. On voit que $[CDQPB]$ est la moitié du produit entre r et le perimètre du polygône $CDQPB$. Comme les hauteurs des triangles CDP et CBP sont égales à $2r$, on a que les aires $[CDQ] = r \cdot DQ$ et $[CBP] = r \cdot PB$. En utilisant que $QT = QV$ et $PU = PT$, il suit que l'aire $[CPQ] = [OVDCBU] - [CDV] - [CBU]$ est indépendante de la position des points P et Q.

□

5. Une bourse contient un nombre fini de pièces de monnaie. Chaque pièce a une valeur entière différente de celles des autres pièces. Est-il possible qu'il y ait exactement 2020 façons de choisir des pièces de cette bourse afin d'avoir la valeur de 2020 ?

Solution : Oui, c'est possible.

Prennons une bourse avec des pièces de valeurs $2, 4, 8, 2014, 2016, 2018$, 2020 et tout nombre impaire entre 503 et 1517. On appelle une pièce *grande* si sa valeur est entre 503 et 1517, on l'appelle *petite* si sa valeur est de $2, 4$ ou 8 et, finalement, on l'appelle *énorme* si sa valeur est de $2014, 2016, 2018$ ou 2020.

Supposons qu'un sous-ensemble de ces pièces ne contienne aucune pièce énorme et que la somme des pièces dans le sous-ensemble est égale à 2020. Si le sous-ensemble contient au moins quatre pièces grandes, la somme doit être au moins $503 + 505 + 507 + 509 > 2020$. De plus, comme toutes les pièces petites ont une valeur paire, si le sous-ensemble contient exactement une ou trois pièces grandes, leur somme doit être impaire. Ainsi, le sous-ensemble doit contenir exactement deux pièces grandes. Les huit sous-ensembles possibles des petites pièces ont sommes des valeurs $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$. Il suit que les modalités d'obtenir la valeur de 2020 en n'utilisant pas des pièces énormes correspondent aux paires des pièces grandes avec des sommes $2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018$ et 2020. Le nombre de telles paires est $250, 251, 251, 252, 252, 253, 253$ ou 254, respectivement. Ainsi, il existe exactement 2016 sous-ensembles de cette bourse d'une valeur de 2020 sans utilisant des pièces énormes. Maintenant, il y a exactement quatre façons d'obtenir une valeur de 2020 en utilisant des pièces énormes, qui sont les suivantes $\{2020\}$, $\{2, 2018\}, \{4, 2016\}$ et $\{2, 4, 2014\}$. Il existe donc exactement 2020 façons d'obtenir la valeur 2020.

Deuxième solution :

Prennons les pièces de valeurs $1, 2, \ldots, 11, 1954, 1955, \ldots, 2019$. La seule modalité d'obtenir une somme de 2020 est de prendre un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 11\}$, d'au moins une pièce, et une seule *grosse* pièce. Il y a 2047 sous-ensembles non vides avec la somme des éléments entre 1 et 66. Ainsi, ils correspondent chacun à une grosse pièce unique qui compléte la valeur jusqu'à 2020, nous avons donc 2047 modalités. Alors, il nous suffit d'éliminer quelques grosses pièces, pour éliminer exactement 27 petites sommes. Cela peut être fait, par exemple, en supprimant les pièces $2020 - n$ pour $n = 1, 5, 6, 7, 8, 9$, car elles correspondent à $1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 = 27$ partitions en nombres distincts inférieurs ou égals à 11. □